19/02/20

Ώρες Γραφείου: Τετάρτη 16:15 - 17:15
users.uoi.gr/spapadak
Μπεληγιάννης, Μια εισαγωγή στην βασική Άλγεβρα — Κάλλιππος
Μπεληγιάννης, Ασκήσεις Βασικής Άλγεβρας — Κάλλιππος
Μπεληγιάννης, ιστοσελίδα μαθήματος, 2013-2014
Μαρμαρίδης, Προχωρημένη Θεωρία Ομάδων — Κάλλιππος

$(S,*)$ σύνολο με πράξη
Ομάδα $(G,*)$ αν $*$ προσεταιριστική, έχει ουδέτερο e_G και κάθε στοιχείο έχει αντίστροφο.
π.χ. $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{R},+)$

Ορισμός: Έστω $(G,*)$ ομάδα. Η G λέγεται ΑΒΕΛΙΑΝΗ αν $a*b=b*a$ για κάθε $a,b\in G$.

π.χ.
Έστω $n\geq 2$ και $G=\{A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ με $\det A\neq 0\}$
και πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων
Ισχυρισμός: Η $(G,\cdot)$ είναι ομάδα, μη αβελιανή
Απόδειξη
Αν $A,B\in G$, τότε $\det(A\cdot B)=\det(A)\cdot\det(B)\neq 0$ από Γραμ. Αλγ. Συνεπώς η πράξη πολλαπλασιασμού καλά ορισμένη στο G.
Η πράξη είναι προσεταιριστική από Γραμ. Αλγ.
Υπάρχει ουδέτερο, ο ταυτοτικός πίνακας $I_n=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&&\vdots\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix}$

Έστω $A\in G$. Από Γραμ. Αλγ. ξέρουμε ότι υπάρχει $B\in G$ με $A\cdot B=B\cdot A=I_n$ $\left(\text{και } \det B=\frac{1}{\det A}\right)$

Συνεπώς G ομάδα.

Έστω $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & & 1 \end{bmatrix}$

Τότε $A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ & & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 \end{bmatrix}$ ενώ $B \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 \end{bmatrix}$

Αφού $A, B \in G$ έπεται η G μη αβελιανή ομάδα.

Συμβολίζουμε $G = GL_n(\mathbb{R})$

Π.χ.

Έστω X σύνολο, θέτουμε $S_X = \{ f : X \to X \mid f : 1\text{-}1 \text{ και επί} \}$

Η πράξη $\circ$ είναι καλά ορισμένη στο X, γιατί σύνθεση 1-1 συναρτήσεων είναι 1-1 και σύνθεση επί συναρτήσεων είναι επί.

Έστω $id_X : X \to X$ η ταυτοτική απεικόνιση, $id_X(a) = a$, $\forall a \in X$.

Έστω $f \in S_X$, τότε $id_X \circ f = f$ και $f \circ id_X = f$ (εύκολη επιβεβαίωση)

Συνεπώς id_X ουδέτερο στοιχείο ως προς $\circ$.

Έστω $f : X \to X$ 1-1 και επί. Από Θ. Συνόλων υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση $g : X \to X$ και ισχύει $(f \circ g)(a) = a$, $(g \circ f)(a) = a$ για κάθε $a \in X$. Συνεπώς $f \circ g = id_X$ και $g \circ f = id_X$ άρα το g αντίστροφο του f ως προς $\circ$. Συνεπώς $(S, \circ)$ ΟΜΑΔΑ.

Ισχυρισμός: Αν $|X| \geq 3$ τότε η ομάδα $(S_X, \circ)$ ΔΕΝ είναι αβελιανή

Απόδειξη ισχυρισμού:

Αφού $|X| \geq 3$, υπάρχουν $a_1, a_2, a_3 \in X$ διαφορετικά ανά δύο.

Ορίζουμε $f: X \to X$, $g: X \to X$ ως εξής:

$f(a_1) = a_2$, $f(a_2) = a_1$ και $f(b) = b$, όταν $b \neq a_1$ και $b \neq a_2$

$g(a_1) = a_3$, $g(a_3) = a_1$ και $g(b) = b$, όταν $b \neq a_1$ και $b \neq a_2$.

Τότε $f, g \in S_X$ και $(f \circ g)(a_2) = f(g(a_2)) = f(a_2) = a_1$

$$(g \circ f)(a_2) = g(f(a_2)) = g(a_1) = a_3 \neq a_1$$

Συνεπώς $f \circ g \neq g \circ f$ άρα $(S_X, \circ)$ ομάδα μη αβελιανή.

Παρατήρηση: Η S_X ονομάζεται ομάδα μεταθέσεων του συνόλου X, και για $X = \{1, 2, 3, \ldots n\}$ συμβολίζεται S_n (για $n \geq 1$) και θα τον μελετήσουμε ~~μελετήσουμε~~ με λεπτομέρειες.

Φυλλάδιο 1, Άσκηση 2

Δείξτε ότι το διάστημα $(-1,1)$ αποτελεί αβελιανή ομάδα με πράξη

$$u * v = \frac{u+v}{1+uv} \text{ για } u, v \in (-1,1)$$

Πρόταση: Έστω $d \in \mathbb{R}$ με $d > 0$. Τότε η πράξη $*$ στο $(-d,d)$ με $u * v = \dfrac{u+v}{1+\frac{uv}{d^2}}$ είναι αβελιανή ομάδα.

Ισχυρισμοί:

1) Έστω $u, v \in (-d,d)$. Τότε $1 + \frac{uv}{d^2} \neq 0$ και $-d < \dfrac{u+v}{1+\frac{uv}{d^2}} < d$

Άρα $*$ καλά ορισμένη πράξη στο $(-d,d)$.

Απόδειξη

Έστω $u \in (-d, d)$ σταθερό.

Αν $u = 0$, τότε $1 + \frac{uv}{d^2} = 1 \neq 0$

Αν $u \neq 0$, τότε $1 + \frac{uv}{d^2} = 0 \iff uv = -d$ ή $v = \frac{-d}{u}$

Έχουμε $\left|\frac{-d^2}{u}\right| = |d| \cdot \left|\frac{d}{u}\right| > |d|$ γιατί $u \in (-d, d)$

Συνεπώς, $[-d, d] \subseteq \left(-\left|\frac{d^2}{u}\right|, \left|\frac{d^2}{u}\right|\right)$

Ορίζουμε για $u \neq 0$ $g\left(-\frac{|d^2|}{|u|}, \frac{|d^2|}{|u|}\right) \to \mathbb{R}$

$g(v) = \dfrac{u + v}{1 + \frac{uv}{d^2}}$ (αν $u = 0$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

Έχουμε g συνεχής, σαν πηλίκο συνεχών.

$$g'(v) = \frac{\left(1 + \frac{uv}{d^2}\right) - \frac{u}{d^2}(u+v)}{\left(1 + \frac{uv}{d^2}\right)^2} = \frac{1 - \frac{u^2}{d^2}}{\left(1 + \frac{uv}{d^2}\right)^2}$$

το οποίο είναι > 0. Άρα γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού που περιέχει το $[-d, d]$

Επιπλέον,

$$g(-d) = \frac{u - d}{1 + \frac{u(-d)}{d^2}} = -d \quad \text{και} \quad g(d) = \frac{u + d}{1 + \frac{ud}{d}} = d.$$

Άρα ο ισχυρισμός 1 ισχύει.

2) Έστω $(u,v,w) \in (-d,d)$. Τότε $u*(v*w) = (u*v)*w$

Απόδειξη ισχυρισμού 2

$$(u*v)*w = \left(\frac{u+v}{1+\frac{uv}{d^2}}\right)*w = \left(\frac{d^2u+d^2v}{d^2+uv}\right)*w = \frac{A}{B}$$

όπου $A = \frac{d^2u+d^2v}{d^2+uv} + w = \frac{d^2u+d^2v+d^2w+uvw}{d+uv}$

$$B = 1 + \frac{\left(\frac{d^2u+d^2v}{d^2+uv}\right)w}{d^2} = 1 + \frac{(u+v)w}{d^2+uv} = \frac{d^2+uv+uw+vw}{d^2+uv}$$

Άρα τελικά : $(u*v)*w = \frac{d^2u+d^2v+d^2w+uvw}{d^2+uv+uw+vw}$

Παρόμοιες πράξεις δίνουν και ότι
$u*(v*w) = d^2u+d^2v+d^2w+u$

Ισχυρισμός 3
Το $0 \in (-d,d)$ ουδέτερο στοιχείο για τον $*$.

Απόδειξη

$u*0 = \frac{u+0}{1+\frac{u \cdot 0}{d}} = u$ και $0*u = \frac{0+u}{1+\frac{0 \cdot u}{d}} = u$

Ισχυρισμός 4

Έστω $u \in (-d, d)$. Τότε το $-u$ είναι "αντίστροφο ως προς $*$"

Απόδειξη ισχυρισμού 4

$$u*(-u) = \frac{u+(-u)}{1+\frac{u(-u)}{d^2}} = 0 \quad \text{και} \quad (-u)*u = \frac{(-u)+u}{1+\frac{(-u)u}{d^2}} = 0$$

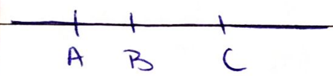
Ισχυρισμός 5

$u * v = v * u$ για κάθε $u, v \in (-d, d)$

Απόδειξη ισχυρισμού 5

$$u * v = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{d^2}} = \frac{v+u}{1+\frac{uv}{d^2}} = v * u$$

Άρα δείξαμε $((-d,d), *)$ ΑΒΕΛΙΑΝΗ ΟΜΑΔΑ.



ταχύτητα u_B ως προς A

ταχύτητα u_C ως προς B

Ερώτημα

Ποια είναι η ταχύτητα u_C ως προς A;

Ο A θα μετρήσει:

$$u_C \text{ ως προς } A = \frac{u_B \text{ ως προς } A + u_C \text{ ως προς } B}{1+\frac{u_B \text{ ως προς } A \cdot u_C \text{ ως προς } B}{c^2}}$$

ταχύτητα φωτός

π.χ.

Αν u_B ως προς $A = 0.6c$

u_C ως προς $B = 0.5c$

τότε u_C ως προς $A = 0.8461c$.